CHƯƠNG V
ĐẠO HÀM

1. Định nghĩa đạo hàm tại một điểm

- Cho hàm số *y = f(x)* xác định trên khoảng *(a; b)* và $x_0 \in (a; b)$:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \qquad (\Delta x = x - x_0,\ \Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0))$$

- Nếu hàm số *y = f(x)* có đạo hàm tại x_0 thì nó liên tục tại điểm đó.

2. Ý nghĩa của đạo hàm

- **Ý nghĩa hình học**:

+ $f'(x_0)$ là hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị hàm số *y = f(x)* tại $M\left(x_0; f(x_0)\right)$.

+ Khi đó phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số *y = f(x)* tại $M\left(x_0; y_0\right)$ là:

$$y - y_0 = f'(x_0).(x - x_0)$$

- **Ý nghĩa vật lí:**

+ Vận tốc tức thời của chuyển động thẳng xác định bởi phương trình *s = s(t)* tại thời điểm t_0 là $v(t_0) = s'(t_0)$.

+ Cường độ tức thời của điện lượng *Q = Q(t)* tại thời điểm t_0 là $I(t_0) = Q'(t_0)$.

3. Qui tắc tính đạo hàm

- $(C)' = 0$ $\quad (x)' = 1$ $\quad (x^n)' = n.x^{n-1} \begin{pmatrix} n \in N \\ n > 1 \end{pmatrix}$ $\quad \left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

- $(u \pm v)' = u' \pm v'$ $\quad (uv)' = u'v + v'u$ $\quad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2} \ (v \neq 0)$

$(ku)' = ku'$ $\quad \left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$

- Đạo hàm của hàm số hợp: Nếu *u = g(x)* có đạo hàm tại *x* là u'_x và hàm số *y = f(u)* có đạo hàm tại *u* là y'_u thì hàm số hợp *y = f(g(x)* có đạo hàm tại *x* là: $y'_x = y'_u.u'_x$

4. Đạo hàm của hàm số lượng giác

- $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$; $\quad \lim_{x \to x_0} \frac{\sin u(x)}{u(x)} = 1$ (với $\lim_{x \to x_0} u(x) = 0$)

- $(\sin x)' = \cos x$ $\quad (\cos x)' = -\sin x$ $\quad (\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$ $\quad (\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$

5. Vi phân

- $dy = df(x) = f'(x).\Delta x$
- $f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0).\Delta x$

6. Đạo hàm cấp cao

- $f''(x) = \left[f'(x)\right]'$; $f'''(x) = \left[f''(x)\right]'$; $f^{(n)}(x) = \left[f^{(n-1)}(x)\right]'$ $(n \in N, n \geq 4)$

- **Ý nghĩa cơ học:**

Gia tốc tức thời của chuyển động *s = f(t)* tại thời điểm t_0 là $a(t_0) = f''(t_0)$.

VẤN ĐỀ 1: Tính đạo hàm bằng định nghĩa

Để tính đạo hàm của hàm số y = f(x) tại điểm x_0 bằng định nghĩa ta thực hiện các bước:
B1: Giả sử Δx là số gia của đối số tại x_0. Tính $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.
B2: Tính $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Bài 1: Dùng định nghĩa tính đạo hàm của các hàm số sau tại điểm được chỉ ra:

a) $y = f(x) = 2x^2 - x + 2$ tại $x_0 = 1$
b) $y = f(x) = \sqrt{3-2x}$ tại $x_0 = -3$
c) $y = f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$ tại $x_0 = 2$
d) $y = f(x) = \sin x$ tại $x_0 = \frac{\pi}{6}$
e) $y = f(x) = \sqrt[3]{x}$ tại $x_0 = 1$
f) $y = f(x) = \frac{x^2+x+1}{x-1}$ tại $x_0 = 0$

Bài 2: Dùng định nghĩa tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $f(x) = x^2 - 3x + 1$
b) $f(x) = x^3 - 2x$
c) $f(x) = \sqrt{x+1}, (x > -1)$
d) $f(x) = \frac{1}{2x-3}$
e) $f(x) = \sin x$
f) $f(x) = \frac{1}{\cos x}$

VẤN ĐỀ 2: Tính đạo hàm bằng công thức

Để tính đạo hàm của hàm số y = f(x) bằng công thức ta sử dụng các qui tắc tính đạo hàm.
Chú ý qui tắc tính đạo hàm của hàm số hợp.

Bài 1: Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = 2x^4 - \frac{1}{3}x^3 + 2\sqrt{x} - 5$
b) $y = \frac{3}{x^2} - \sqrt{x} + \frac{2}{3}x\sqrt{x}.$
c) $y = (x^3 - 2)(1 - x^2)$
d) $y = (x^2 - 1)(x^2 - 4)(x^2 - 9)$
e) $y = (x^2 + 3x)(2 - x)$
f) $y = \left(\sqrt{x} + 1\right)\left(\frac{1}{\sqrt{x}} - 1\right)$
g) $y = \frac{3}{2x+1}$
h) $y = \frac{2x+1}{1-3x}$
i) $y = \frac{1+x-x^2}{1-x+x^2}$
k) $y = \frac{x^2-3x+3}{x-1}$
l) $y = \frac{2x^2-4x+1}{x-3}$
m) $y = \frac{2x^2}{x^2-2x-3}$

Bài 2: Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = (x^2 + x + 1)^4$
b) $y = (1 - 2x^2)^5$
c) $y = (x^3 - 2x^2 + 1)^{11}$
d) $y = (x^2 - 2x)^5$
e) $y = \left(3 - 2x^2\right)^4$
f) $y = \frac{1}{(x^2-2x+5)^2}$
g) $y = \frac{(x+1)^2}{(x-1)^3}$
h) $y = \left(\frac{2x+1}{x-1}\right)^3$
i) $y = \left(2 - \frac{3}{x^2}\right)^3$

Bài 3: Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = \sqrt{2x^2 - 5x + 2}$
b) $y = \sqrt{x^3 - x + 2}$
c) $y = \sqrt{x + \sqrt{x}}$
d) $y = (x-2)\sqrt{x^2+3}$
e) $y = \sqrt{(x-2)^3}$
f) $y = \left(1 + \sqrt{1-2x}\right)^3$

g) $y = \sqrt{\dfrac{x^3}{x-1}}$ h) $y = \dfrac{4x+1}{\sqrt{x^2+2}}$ i) $y = \dfrac{\sqrt{4+x^2}}{x}$

Bài 4: Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = \left(\dfrac{\sin x}{1+\cos x}\right)^2$ b) $y = x.\cos x$ c) $y = \sin^3(2x+1)$

d) $y = \sqrt{\cot 2x}$ e) $y = \sin\sqrt{2+x^2}$ f) $y = \sqrt{\sin x + 2x}$

g) $y = (2+\sin^2 2x)^3$ h) $y = \sin\left(\cos^2 x \tan^2 x\right)$ i) $y = 2\sin^2 4x - 3\cos^3 5x$

k) $y = \cos^2\left(\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\right)$ l) $y = \tan 2x + \dfrac{2}{3}\tan^3 2x + \dfrac{1}{5}\tan^5 2x$

Bài 5: Cho n là số nguyên dương. Chứng minh rằng:

a) $(\sin^n x.\cos nx)' = n\sin^{n-1} x.\cos(n+1)x$ b) $(\sin^n x.\sin nx)' = n.\sin^{n-1} x.\sin(n+1)x$

c) $(\cos^n x.\sin nx)' = n.\cos^{n-1} x.\cos(n+1)x$ d) $(\cos^n x.\cos nx)' = -n.\cos^{n-1} x.\sin(n+1)x$

VẤN ĐỀ 3: Phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) của hàm số y = f(x)

1. *Phương trình tiếp tuyến tại điểm $M(x_0, y_0) \in (C)$ là:* $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$ *(*)*

2. *Viết phương trình tiếp tuyến với (C), biết tiếp tuyến có hệ số góc k:*

+ Gọi x_0 là hồnh độ của tiếp điểm. Ta có: $f'(x_0) = k$ *(ý nghĩa hình học của đạo hàm)*

+ Giải phương trình trên tìm x_0, rồi tìm $y_0 = f(x_0)$.

+ Viết phương trình tiếp tuyến theo công thức (*)

3. *Viết phương trình tiếp tuyến (d) với (C), biết (d) đi qua điểm $A(x_1, y_1)$ cho trước:*

+ Gọi (x_0, y_0) là tiếp điểm (với $y_0 = f(x_0)$).

+ Phương trình tiếp tuyến (d): $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$

(d) qua $A(x_1, y_1) \Leftrightarrow y_1 - y_0 = f'(x_0)(x_1 - x_0)$ (1)

+ Giải phương trình (1) với ẩn là x_0, rồi tìm $y_0 = f(x_0)$ *và* $f'(x_0)$.

+ Từ đó viết phương trình (d) theo công thức (*).

4. *Nhắc lại: Cho (Δ): y = ax + b. Khi đó:*

$+ (d) /\!/ (\Delta) \Rightarrow k_d = a$ $+ (d) \perp (\Delta) \Rightarrow k_d = -\dfrac{1}{a}$

Bài 1: Cho hàm số (C): $y = f(x) = x^2 - 2x + 3$. Viết phương trình tiếp tuyến với (C):

a) Tại điểm thuộc (C) có hoành độ $x_0 = 1$.

b) Song song với đường thẳng 4x – 2y + 5 = 0.

c) Vuông góc với đường thẳng x + 4y = 0.

d) Vuông góc với đường phân giác thứ nhất của góc hợp bởi các trục tọa độ.

Bài 2: Cho hàm số $y = f(x) = \dfrac{2 - x + x^2}{x-1}$ (C).

a) Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm M(2; 4).

b) Viết phương trình tiếp tuyến của (C) biết tiếp tuyến có hệ số góc k = 1.

Bài 3: Cho hàm số $y = f(x) = \dfrac{3x+1}{1-x}$ (C).

a) Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm A(2; –7).
b) Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại giao điểm của (C) với trục hoành.
c) Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại giao điểm của (C) với trục tung.
d) Viết phương trình tiếp tuyến của (C) biết tiếp tuyến song song với đường thẳng d: $y = \dfrac{1}{2}x + 100$.
e) Viết phương trình tiếp tuyến của (C) biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng Δ: 2x + 2y – 5 = 0.

Bài 4: Cho hàm số (C): $y = x^3 - 3x^2$.

a) Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm I(1, –2).
b) Chứng minh rằng các tiếp tuyến khác của đồ thị (C) không đi qua I.

Bài 5: Cho hàm số (C): $y = \sqrt{1 - x - x^2}$. Tìm phương trình tiếp tuyến với (C):

a) Tại điểm có hoành độ $x_0 = \dfrac{1}{2}$.
b) Song song với đường thẳng x + 2y = 0.

VẤN ĐỀ 4: Tính đạo hàm cấp cao

1. *Để tính đạo hàm cấp 2, 3, 4, ... ta dùng công thức:* $y^{(n)} = \left(y^{(n-1)}\right)'$

2. *Để tính đạo hàm cấp n:*

- *Tính đạo hàm cấp 1, 2, 3, ..., từ đó dự đoán công thức đạo hàm cấp n.*
- *Dùng phương pháp quy nạp toán học để chứng minh công thức đúng.*

Bài 1: Cho hàm số $f(x) = 3(x+1)\cos x$.

a) Tính $f'(x), f''(x)$ b) Tính $f''(\pi), f''\left(\dfrac{\pi}{2}\right), f''(1)$

Bài 2: Tính đạo hàm của các hàm số đến cấp được chỉ ra:

a) $y = \cos x,\ y'''$ b) $y = 5x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 4x + 7,\ y''$ c) $y = \dfrac{x-3}{x+4},\ y''$

d) $y = \sqrt{2x - x^2},\ y''$ e) $y = x\sin x,\ y''$ f) $y = x\tan x,\ y''$

g) $y = (x^2+1)^3, y''$ h) $y = x^6 - 4x^3 + 4,\ y^{(4)}$ i) $y = \dfrac{1}{1-x},\ y^{(5)}$

Bài 3: Cho n là số nguyên dương. Chứng minh rằng:

a) $\left(\dfrac{1}{1+x}\right)^{(n)} = \dfrac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}}$ b) $(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \dfrac{n.\pi}{2}\right)$ c) $(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + \dfrac{n.\pi}{2}\right)$

Bài 4: Tính đạo hàm cấp n của các hàm số sau:

a) $y = \dfrac{1}{x+2}$ b) $y = \dfrac{1}{x^2 - 3x + 2}$ c) $y = \dfrac{x}{x^2 - 1}$

d) $y = \dfrac{1-x}{1+x}$ e) $y = \sin^2 x$ f) $y = \sin^4 x + \cos^4 x$

Bài 5: Chứng minh các hệ thức sau với các hàm số được chỉ ra:

a) $\begin{cases} y = x\sin x \\ xy'' - 2(y' - \sin x) + xy = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} y = \sqrt{2x - x^2} \\ y^3 y'' + 1 = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} y = x\tan x \\ x^2 y'' - 2(x^2 + y^2)(1 + y) = 0 \end{cases}$ d) $\begin{cases} y = \dfrac{x-3}{x+4} \\ 2y'^2 = (y-1)y'' \end{cases}$

VẤN ĐỀ 5: Tính giới hạn dạng $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\sin u(x)}{u(x)}$

Ta sử dụng các công thức lượng giác để biến đổi và sử dụng công thức

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\sin u(x)}{u(x)} = 1 \text{ (với } \lim_{x \to x_0} u(x) = 0 \text{)}$$

Bài 1: Tính các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 3x}{\sin 2x}$ b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x^2}$ c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan 2x}{\sin 5x}$ d) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\cos x - \sin x}{\cos 2x}$

e) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 + \sin x - \cos x}{1 - \sin x - \cos x}$ f) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{1 - \sin x}{\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)^2}$ g) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)\tan x$ h) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{6}} \dfrac{\sin\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right)}{\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \cos x}$

VẤN ĐỀ 6: Các bài toán khác

Bài 1: Giải phương trình $f'(x) = 0$ với:

a) $f(x) = 3\cos x - 4\sin x + 5x$ b) $f(x) = \cos x + \sqrt{3}\sin x + 2x - 1$

c) $f(x) = \sin^2 x + 2\cos x$ d) $f(x) = \sin x - \dfrac{\cos 4x}{4} - \dfrac{\cos 6x}{6}$

e) $f(x) = 1 - \sin(\pi + x) + 2\cos\dfrac{3\pi + x}{2}$ f) $f(x) = \sin 3x - \sqrt{3}\cos 3x + 3(\cos x - \sqrt{3}\sin x)$

Bài 2: Giải phương trình $f'(x) = g(x)$ với:

a) $\begin{cases} f(x) = \sin^4 3x \\ g(x) = \sin 6x \end{cases}$ b) $\begin{cases} f(x) = \sin^3 2x \\ g(x) = 4\cos 2x - 5\sin 4x \end{cases}$

c) $\begin{cases} f(x) = 2x^2\cos^2\dfrac{x}{2} \\ g(x) = x - x^2\sin x \end{cases}$ d) $\begin{cases} f(x) = 4x\cos^2\dfrac{x}{2} \\ g(x) = 8\cos\dfrac{x}{2} - 3 - 2x\sin x \end{cases}$

Bài 3: Giải bất phương trình $f'(x) > g'(x)$ với:

a) $f(x) = x^3 + x - \sqrt{2},\ g(x) = 3x^2 + x + \sqrt{2}$ b) $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x - 8},\ g(x) = x$

c) $f(x) = 2x^3 - x^2 + \sqrt{3},\ g(x) = x^3 + \dfrac{x^2}{2} - \sqrt{3}$ d) $f(x) = \dfrac{2}{x},\ g(x) = x - x^3$

Bài 4: Xác định m để các bất phương trình sau nghiệm đúng với mọi x ∈ R:

a) $f'(x) > 0$ *với* $f(x) = \frac{mx^3}{3} - 3x^2 + mx - 5$

b) $f'(x) < 0$ *với* $f(x) = \frac{mx^3}{3} - \frac{mx^2}{2} + (m+1)x - 15$

Bài 5: Cho hàm số $y = x^3 - 2x^2 + mx - 3$. Tìm *m* để:

a) $f'(x)$ bằng bình phương của một nhị thức bậc nhất.

b) $f'(x) \geq 0$ với mọi *x*.

Bài 6: Cho hàm số $f(x) = -\frac{mx^3}{3} + \frac{mx^2}{2} - (3-m)x + 2$. Tìm *m* để:

a) $f'(x) < 0$ với mọi *x*.

b) $f'(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt cùng dấu.

c) Trong trường hợp $f'(x) = 0$ có hai nghiệm, tìm hệ thức giữa hai nghiệm không phụ thuộc vào *m*.

BÀI TẬP ÔN CHƯƠNG V

Bài 1: Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = x^3(x^2 - 4)$ b) $y = (x+3)(x-1)$ c) $y = x^6 - 2\sqrt{x} + 2$

d) $y = \sqrt{x}(2x^2 - 1)$ e) $y = (2x^2+1)(4x^3 - 2x)$ f) $y = \dfrac{1+9x}{x+1}$

g) $y = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{2x - 3}$ h) $y = \dfrac{1}{x^2 - 2x}$ i) $y = (3 - 2x^2)^2$

Bài 2: Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = \sqrt{x^4 - 3x^2 + 7}$ b) $y = \sqrt{1 - x^2}$ c) $y = \sqrt{x^2 - 3x - 2}$

d) $y = \dfrac{1+x}{\sqrt{1-x}}$ e) $y = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ f) $y = \sqrt{\dfrac{x-3}{x}}$

Bài 3: Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = \sin(x^3 - x + 2)$ b) $y = \tan(\cos x)$ c) $y = \dfrac{\sin x}{x} + \dfrac{x}{\sin x}$

d) $y = \dfrac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$ e) $y = x\cot(x^2 - 1)$ f) $y = \cos^2(x^2 + 2x + 2)$

g) $y = \sqrt{\cos 2x}$ h) $y = \cot^3\sqrt{1 + x^2}$ i) $y = \tan^2(3x^2 + 4x)$

Bài 4: Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) của các hàm số, với:

a) $(C): y = x^3 - 3x^2 + 2$ tại điểm $M(-1,-2)$.

b) $(C): y = \dfrac{x^2 + 4x + 5}{x + 2}$ tại điểm có hoành độ $x_0 = 0$.

c) $(C): y = \sqrt{2x+1}$ biết hệ số góc của tiếp tuyến là $k = \dfrac{1}{3}$.

Bài 5: Cho hàm số $y = x^3 - 5x^2 + 2$ có đồ thị (C). Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị (C) sao cho tiếp tuyến đó:

a) Song song với đường thẳng $y = -3x + 1$.

b) Vuông góc với đường thẳng $y = \dfrac{1}{7}x - 4$.

c) Đi qua điểm $A(0;2)$.

Bài 6: a) Cho hàm số $f(x) = \dfrac{\cos x}{\sqrt{\cos 2x}}$. Tính giá trị của $f'\left(\dfrac{\pi}{6}\right) + f'\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$.

b) Cho hai hàm số $f(x) = \sin^4 x + \cos^4 x$ và $g(x) = \dfrac{1}{4}\cos 4x$. So sánh $f'(x)$ và $g'(x)$.

Bài 7: Tìm m để $f'(x) > 0, \forall x \in R$, với:

a) $f(x) = x^3 + (m-1)x^2 + 2x + 1$. b) $f(x) = \sin x - m\sin 2x - \dfrac{1}{3}\sin 3x + 2mx$

Bài 8: Chứng minh rằng $f'(x) > 0, \forall x \in R$, với:

a) $f(x) = 2x + \sin x$. b) $f(x) = \dfrac{2}{3}x^9 - x^6 + 2x^3 - 3x^2 + 6x - 1$.

Bài 9:

a)